

Un théorème de Sturm sur les polygones réguliers

par Jafar AGHAYANI-CHAVOSHI*

Résumé.

Dans cet article, nous donnons une preuve, basée sur la géométrie complexe, d'un Théorème sur les polygones réguliers découvert par Simon L'huillier et démontré par Charles Sturm. L'étude de divers cas particuliers rend le résultat accessible à un large public.

I Notice biographique

Charles François Sturm est né le 29 septembre 1803 à Genève, à l'époque chef-lieu du département français du Léman (de 1798 à 1814). À cette date, en raison de l'afflux d'un grand nombre de réfugiés français protestants, Genève était devenue un des hauts-lieux de la Science. Le père de Sturm, originaire de Strasbourg, était "régent d'arithmétique". Son fils Charles fit ses études à Genève et les compléta à l'Académie genevoise (aujourd'hui l'Université) par des cours professés notamment par L'huillier (1750-1840), Maurice Le Baron, Marc-Auguste Pictet et Pierre Prévost. Après un passage comme précepteur chez Madame de Staël, au château de Coppet, Sturm, accompagné de son fidèle ami, le physicien expérimentateur et inventeur Daniel Colladon, se rend à Paris en 1825.



Figure 1. Charles Sturm.

Il est rapidement introduit dans les cercles scientifiques et fréquente Laplace, Poisson, Fourier, Gay-

* Université Technologique de Sharif, Téhéran Iran
jchavoshi@hotmail.com

Lussac, Ampère, Humboldt et Arago. Il suit les cours de plusieurs d'entre eux à la Sorbonne et au Collège de France, en plus des enseignements de Cauchy et Lacroix. En réponse à un problème proposé par l'Académie des Sciences de Paris, Sturm et Colladon, déterminent expérimentalement la vitesse du son dans les eaux du lac Léman et remportent en 1827 le grand prix de l'Académie. Charles Sturm obtient ensuite un poste de professeur de mathématiques spéciales au collège Rollin à Paris, mais il poursuit ses recherches mathématiques en parallèle. C'est en 1829 qu'il énonce son célèbre théorème sur le nombre de racines réelles d'une équation dans un intervalle. À partir de 1830, il étudie avec son ami Liouville la théorie générale des oscillations et introduit une classe d'équations différentielles, dont les solutions sont développables en séries de fonctions orthogonales, et qui sont appelées aujourd'hui "équations de Sturm-Liouville". Sa carrière universitaire débute par un poste de professeur à l'École Polytechnique. En 1836, il est élu à l'Académie des Sciences et en 1837 il devient membre correspondant de l'Académie de Berlin. En 1840, il succède à Poisson comme professeur à la Sorbonne. Sturm meurt à Paris le 18 décembre 1855. Il est inhumé au cimetière du Montparnasse et Liouville prononce à cet occasion un poignant éloge.

II Étude de quelque cas simples

II.1 Le théorème de L'huillier-Sturm

Ce théorème a été énoncé pour la première fois par Simon L'huillier [1] mais c'est Sturm qui en publie la première démonstration [4]. À ce sujet, il écrit :

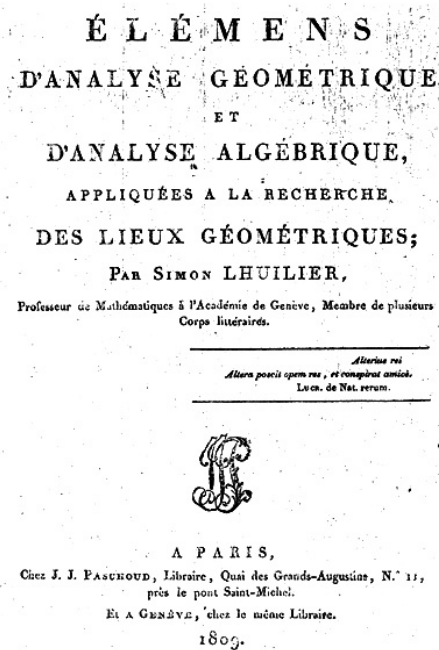


Figure 2. Page de garde du livre de L'Huillier.

M. L'huillier n'ayant point encore publié sa démonstration, nous pensons que nos recherches sur ce sujet seront accueillies avec quelque bienveillance".

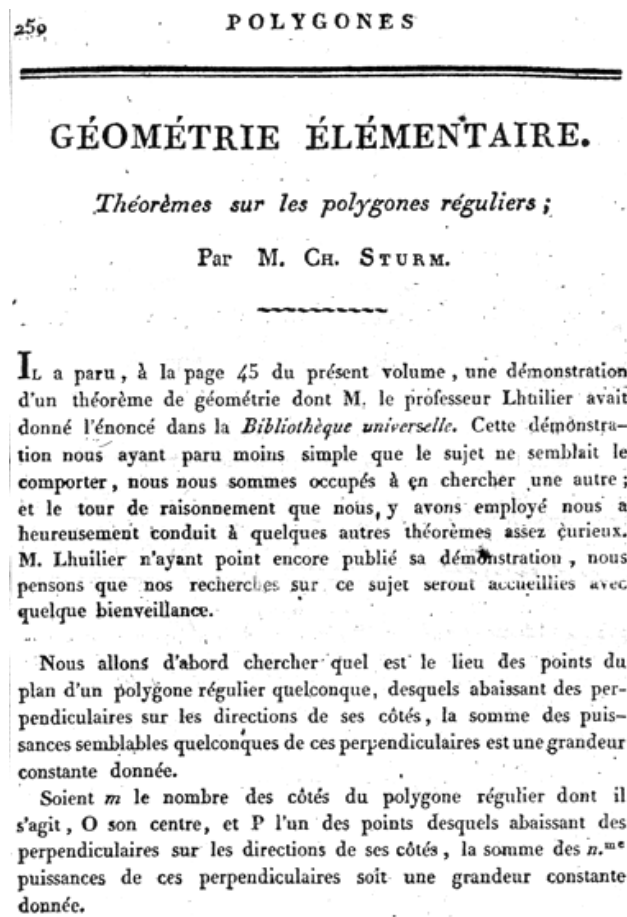


Figure 3. Fac simile de la première page de l'article de Sturm.

Toutefois la démonstration de Sturm ne traite pas le cas général du théorème. Le théorème de Sturm-L'huillier s'énonce ainsi :

Théorème 1 (Lhuillier-Sturm). Soit un polygone régulier à n sommets A_1, \dots, A_n . M étant un point du plan, on note H_k la projection orthogonale de M sur la droite $A_k A_{k+1}$, pour $k = 1$ à n , en faisant la convention $A_{n+1} = A_1$. Soit p un entier tel que $2 \leq p \leq n - 1$ et C une constante réelle. Alors le lieu géométrique des points M tels que

$$\sum_{k=1}^n MH_k^p = C$$

est soit vide, soit un ensemble de cercles concentriques.

Remarquons que pour deux sommets A et B , le résultat n'est pas valide. L'ensemble cherché est alors soit \emptyset , soit formé de la droite AB si $C = 0$, ou de deux droites parallèles si $C > 0$. Il s'agit dans l'énoncé d'un "vrai" polygone et la valeur minimale de n est $n = 3$.

II.2 Le cas $n = 3, p = 2$ (triangle équilatéral)

Considérons le triangle équilatéral de la figure 4. Dans le repère orthonormé indiqué, les sommets du triangle ont pour coordonnées :

$$A(0, a\sqrt{3}), B(-a, 0), C(a, 0).$$

On détermine alors les équations des droites qui portent les côtés du triangle :

- BC : $y = 0$.
- AC : $x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0$.
- AB : $x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3} = 0$.

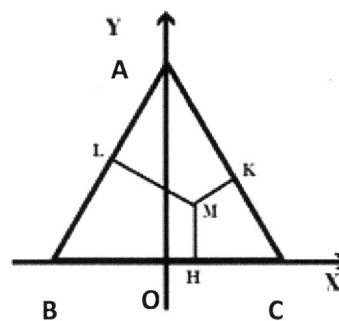


Figure 4. Le cas du triangle équilatéral.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. Pour simplifier, nous noterons K, H, L les points notés H_k précédemment. En utilisant la formule qui donne la distance d'un point à une droite dont on connaît l'équation, on a alors :

$$MH^2 + MK^2 + ML^2 = C$$

$$\iff 4y^2 + (x\sqrt{3} - y + a\sqrt{3})^2 + (x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3})^2 = 4C.$$

Après simplifications, il vient :

$$3x^2 + 3y^2 - 2a\sqrt{3}y + 3a^2 = 2C,$$

qui se met sous la forme :

$$3x^2 + 3\left(y - \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2(C - a^2).$$

Sous cette forme, on voit que le lieu des points M est :

- l'ensemble vide si $C < a^2$,
- un point si $C = a^2$,
- un cercle de centre $\Omega\left(0, \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{2(C-a^2)}}{\sqrt{3}}$ si $C > a^2$.

On peut remarquer que Ω n'est autre que le centre de gravité du triangle.

III Le cas $n = 4, p = 2$ (carré)

Considérons un carré $ABCD$ de côté $2a$. Pour simplifier les calculs nous choisissons le repère indiqué à la figure 5. Les côtés sont parallèles aux axes et les diagonales se coupent en O . Considérons toujours un

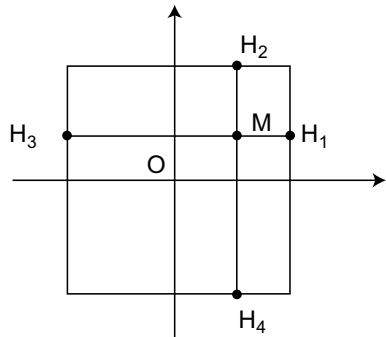


Figure 5. Le cas du carré.

point $M(x, y)$ du plan. Les points H_k ont les coordonnées suivantes :

$$H_1(a, y), H_2(x, a), H_3(-a, y), H_4(x, -a).$$

Nous avons alors :

$$\sum_{i=1}^4 MH_i^2 = (a-x)^2 + (a-y)^2 + (x+a)^2 + (y+a)^2,$$

et $\sum_{i=1}^4 MH_i^2 = C$ se met sous la forme :

$$x^2 + y^2 = \frac{C - 4a^2}{2}.$$

On constate alors que le lieu des points M est :

- l'ensemble vide si $C < 4a^2$,
- un point si $C = 4a^2$,
- un cercle de centre O et de rayon $R = \frac{\sqrt{C-4a^2}}{\sqrt{2}}$ si $C > 4a^2$.

IV Le cas $n \geq 3, p = 2$

Le fait que l'exposant p soit égal à deux rend les calculs plus faciles. Nous aurons besoin du résultat suivant sur les sommes de cosinus :

Lemme 2. La relation suivante est vérifiée :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} : \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = 0, \quad (1)$$

ainsi que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n}{2}. \quad (2)$$

Démonstration. Il est tout à fait possible de démontrer ces résultats par des formules trigonométriques, mais l'exponentielle complexe en donne une preuve élémentaire. La somme (1) est la partie entière du nombre complexe :

$$Z_1 = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\theta} e^{\frac{2ik\pi}{n}},$$

or ce nombre est nul, puisque par sommation d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = \frac{1 - e^{2i\pi}}{1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}} = 0.$$

Quant à la deuxième somme (2), elle se décompose en :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(2\theta + \frac{4ik\pi}{n}\right).$$

Comme pour (1), la contribution des cosinus est nulle et on trouve donc $\frac{n}{2}$. □

Pour un point M du plan, soit θ une mesure de l'angle formé par OM avec ON_1 , comme indiqué sur la figure 6. Notons r le rayon du cercle inscrit dans le polygone (i.e. $OH_k = r$) et $\rho = OM$. La distance MH_1 est donnée par : $MH_1 = |r - \rho \cos \theta|$ et plus généralement, par rotation d'angle au centre $\frac{2\pi}{n}$, la distance MH_k vaut $|r - \rho \cos(\theta + \frac{2k\pi}{n})|$. Ceci nous permet d'écrire l'équation du lieu sous la forme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(r - \rho \cos\left(\theta + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2 = C.$$

En développant et en utilisant les résultats 1 et 2, on réduit l'équation à

$$nr^2 + \frac{n}{2}\rho^2 = C.$$

Proposition 3. Soit (\mathcal{P}) le lieu des points satisfaisant l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} MH_k^2 = C$. Si $C < nr^2$, $(\mathcal{P}) = \emptyset$; si $C = nr^2$, (\mathcal{P}) se réduit au centre O , et si $C > nr^2$, c'est un cercle de centre O et de rayon $R = \sqrt{\frac{2(C-nr^2)}{n}}$.

Remarquons que pour $n = 4$, on retrouve bien le rayon calculé précédemment. En effet on a dans ce cas $r = a$ (demi-côté du carré) et la formule ci-dessus donne : $R = \sqrt{\frac{2(C-4a^2)}{4}} = \sqrt{\frac{C-4a^2}{2}}$.

Dans le cas de l'hexagone ($n = 6$), la valeur critique est $6r^2$ et pour $C > 6r^2$ on obtient un cercle de rayon $R = \sqrt{\frac{2(C-6r^2)}{6}} = \sqrt{\frac{C-6r^2}{3}}$.

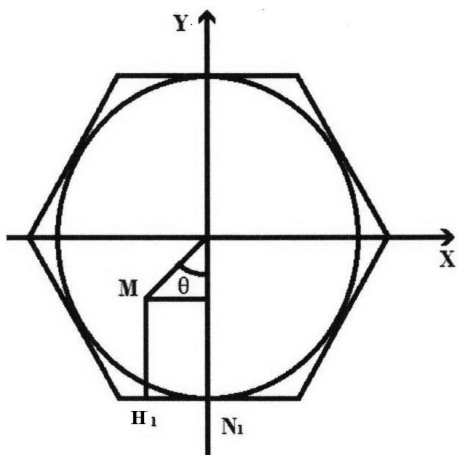


Figure 6. Le cas de l'hexagone.

Nous allons maintenant aborder le cas général. Le lecteur désireux de se familiariser avec la géométrie complexe peut consulter [6] ou [5].

V Projection orthogonale dans le plan complexe

Nous rappelons tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 4. Le projeté orthogonal de $M(z)$ sur la droite $A(a)B(b)$ est le point $M'(z')$ défini par :

$$z' - a = (b - a)\Re\left(\frac{z - a}{b - a}\right) \quad (3)$$

Démonstration. Il suffit de le montrer pour $A = 0$, c'est à dire $a = 0$. On a alors : $z' = b\Re\left(\frac{z}{b}\right)$. Comme z' et b sont dans un rapport réel, le point $M'(z')$ est sur OB . Il ne reste plus qu'à vérifier que MM' est orthogonale à OB . On rappelle que le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u} = (x, y)$, $\vec{v} = (x', y')$ est donné par : $\langle u, v \rangle = xx' + yy' = \Re(z\bar{z}')$, si $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$.

On a donc ici :

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{OB} \rangle &= \Re\left(b\bar{b}\Re\left(\frac{z}{b}\right) - zb\bar{b}\right) \\ &= \Re\left(\Re\left(\frac{zb\bar{b}}{b}\right) - zb\bar{b}\right) \\ &= \Re(\bar{b}z) - \Re(\bar{b}z) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Passons maintenant au calcul de $|z' - z| = MM'$.

Proposition 5. La distance de $M(z)$ à la droite $A(a)B(b)$ est donnée par :

$$|z - z'| = MM' = \left| \Im\left((z - a)\frac{|b - a|}{b - a}\right) \right|. \quad (4)$$

Démonstration. Grâce à la formule (3), nous écrivons :

$$z - z' = \frac{(z - a)(b - a)}{b - a} - (b - a)\Re\left(\frac{z - a}{b - a}\right),$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} |z - z'| &= |b - a| \left| \frac{z - a}{b - a} - \Re\left(\frac{z - a}{b - a}\right) \right| \\ &= \left| (z - a)\frac{|b - a|}{b - a} - \Re\left((z - a)\frac{|b - a|}{b - a}\right) \right| \\ &= \left| \Im\left((z - a)\frac{|b - a|}{b - a}\right) \right| \quad \square \end{aligned}$$

Nous modifions maintenant cette expression de la distance en introduisant le nombre complexe de module 1 défini par :

$$\bar{u} = \frac{|b - a|}{b - a}. \quad (5)$$

Proposition 6. Le carré de la distance de $M(z)$ à la droite $A(a)B(b)$ est donnée par :

$$|z - z'|^2 = MM'^2 = -\frac{1}{4} \left[(z - a)\bar{u} - (\bar{z} - \bar{a})u \right]^2. \quad (6)$$

Démonstration. D'après (4), on a :

$$MM' = \Im\left((z - a)\bar{u}\right) = \frac{(z - a)\bar{u} - (\bar{z} - \bar{a})u}{2i},$$

et on obtient (6) en élevant au carré. \square

VI Projection sur un côté du polygone régulier

VI.1 Choix du repère

Dans un premier temps on suppose que le rayon du cercle circonscrit au polygone est égal à 1. Le choix du repère orthonormé sera fait de manière à ce que les sommets du polygone régulier aient pour affixe les racines n -ièmes complexes de l'unité, à savoir les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, pour $k = 0$ à $n - 1$. Le point M d'affixe z sera noté, M , $M(z)$, ou par abus z .

VI.2 Calcul de MH_k^2

Pour appliquer la formule (6), nous devons calculer le nombre complexe u pour chacun des côtés du polygone. Nous le noterons u_k . La valeur de a est $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{i\theta_k}$, en notant $\theta_k = \frac{2ik\pi}{n}$. Nous avons alors :

$$u_k = \frac{e^{i\theta_{k+1}} - e^{i\theta_k}}{|e^{i\theta_{k+1}} - e^{i\theta_k}|} = e^{i\theta_k} \frac{e^{i\theta_1} - 1}{|e^{i\theta_1} - 1|}.$$

En effet, le dénominateur ne dépend pas de k , puisqu'il est égal à la longueur du côté du polygone régulier $|e^{i\theta_1} - 1|$.

Nous voyons apparaître le nombre complexe de module 1, caractérisant la géométrie du polygone :

$$\phi = \frac{e^{i\theta_1} - 1}{|e^{i\theta_1} - 1|}. \quad (7)$$

ce qui nous permet l'écriture simplifiée : $u_k = e^{i\theta_k} \phi$. Appliquant alors la formule (6), nous obtenons :

Proposition 7. *Le carré de la distance de $M(z)$ au k -ième côté du polygone (les côtés étant numérotés à partir de $k = 0$) est donnée par :*

$$|z - z'_k|^2 = MH_k^2 = -\frac{1}{4} \left[ze^{-i\theta_k} \bar{\phi} - \bar{z} e^{i\theta_k} \phi + \phi - \bar{\phi} \right]^2. \quad (8)$$

VII Preuve du théorème de Sturm dans le cas où l'exposant p est pair

Nous poserons $n = 2p$ avec $p \geq 1$. Pour simplifier les calculs, nous poserons : $X = \bar{z}\phi$ et $\eta = \phi - \bar{\phi}$.

Il nous faut calculer :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (MH_k^2)^p &= \frac{(-1)^p}{4^p} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ze^{-i\theta_k} \bar{\phi} - ze^{i\theta_k} \phi + \phi - \bar{\phi} \right]^{2p} \\ &= \frac{(-1)^p}{4^p} \sum_{k=0}^{n-1} (\bar{X} e^{-i\theta_k} - X e^{i\theta_k} + \eta)^{2p}. \end{aligned}$$

Pour continuer le calcul, nous appliquons la formule :

$$(a + b + c)^{2p} = \sum_{m+j+r=2p} \frac{(2p)!}{m!j!r!} a^m b^j c^r.$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} &(\bar{X} e^{-i\theta_k} - X e^{i\theta_k} + \eta)^{2p} = \dots \\ \dots &= \sum_{m+j+r=2p} \frac{(2p)!}{m!j!r!} (\bar{X} e^{-i\theta_k})^m (-X e^{i\theta_k})^j \eta^r, \end{aligned}$$

ce qui en posant $\alpha_{mjr} = (-1)^j \eta^r \frac{(2p)!}{m!j!r!}$, peut encore s'écrire :

$$(\bar{X} e^{-i\theta_k} - X e^{i\theta_k} + \eta)^{2p} = \sum_{m+j+r=2p} \alpha_{mjr} \bar{X}^m X^j e^{i(j-m)\theta_k}.$$

Revenant à la somme des MH_k^p , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-1} (MH_k^2)^{2p} = \dots \\ \dots &= \frac{(-1)^p}{4^p} \sum_{m+j+r=2p} \alpha_{mjr} \bar{X}^m X^j \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(j-m)\theta_k}. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant évaluer les sommes

$$\varepsilon_{jm} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{i(j-m)\theta_k}.$$

La même démonstration que celle du lemme 2 nous permet de montrer que : $\varepsilon_{jm} = 0$ si $j \neq m$ et $\varepsilon_{jj} = n = 2p$, ce qui simplifie notablement notre expression :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} MH_k^{2p} &= \frac{(-1)^p 2p}{4^p} \sum_{2j+r=2p} \alpha_{jjr} |X|^j \\ &= \frac{(-1)^p 2p}{4^p} \sum_{j=0}^p \alpha_{jj2(p-j)} |X|^j. \end{aligned}$$

D'après la définition de X , on a : $|X| = |z|$, et finalement :

$$\sum_{k=0}^{n-1} MH_k^{2p} = \frac{(-1)^p 2p}{4^p} \sum_{j=0}^p \alpha_{jj2(p-j)} |z|^j. \quad (9)$$

Pour toute constante $C > 0$, l'équation $\sum_{k=0}^{n-1} MH_k^{2p} = C$ est alors équivalente à $P_C(|z|) = 0$, où P_C est le polynôme à coefficients réels de degré $2p$ défini par :

$$P_C(x) = \frac{(-1)^p 2p}{4^p} \sum_{j=0}^p \alpha_{jj2(p-j)} x^j - C.$$

Si ce polynôme n'a pas de racines réelles positives, l'ensemble des points M qui satisfont $\sum_{k=0}^{n-1} MH_k^{2p} = C$ est vide. Sinon, en notant q_1, \dots, q_s , les racines positives de P_C rangée par ordre croissant, l'ensemble des points M cherché est la réunion des cercles d'équation complexe $|z| = q_i$ pour $i = 1$ à s .

Ceci achève la preuve du théorème de Sturm lorsque l'exposant n est pair. Passons maintenant au cas impair.

VIII Preuve du théorème de Sturm dans le cas où l'exposant n est impair

L'entier n est supposé impair et on note $n = 2p + 1$. Dans cette section nous supposons que le point $M(z)$ est situé à l'intérieur du polygone régulier dont les sommets sont les racine n -ièmes de l'unité. Nous

avons donc $MH_k = |z - z_k| < 1$ et nous pouvons poser $|z - z_k|^2 = 1 + t_k$ avec $t_k \in]-1, 0[$. On a alors :

$$|z - z_k| = \sqrt{1 + t_k} = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{s-1} (2s)!}{2^{2s} (2s-1)s!^2} t_k^s = \sum_{s=0}^{+\infty} a_s t_k^s.$$

La série entière ci-dessus a pour rayon de convergence $R = 1$.

On calcule maintenant pour un k fixé :

$$|z - z_k|^{2p+1} = |z - z_k|^{2p} \sqrt{1 + t_k} = |z - z_k|^{2p} \sum_{s=0}^{+\infty} a_s t_k^s$$

Mais :

$$t_k^s = \left(|z - z_k|^2 - 1 \right)^s = \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} |z - z_k|^{2j},$$

d'où :

$$|z - z_k|^{2p+1} = |z - z_k|^{2p} \sum_{s=0}^{+\infty} a_s \sum_{j=0}^s (-1)^j \binom{s}{j} |z - z_k|^{2j}.$$

Cette famille étant sommable, il est possible de réécrire cette relation sous la forme :

$$|z - z_k|^{2p+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j |z - z_k|^{2j+2p},$$

où la série entière a un rayon au moins égal à 1. Les coefficients b_j sont indépendants de l'indice k . Une dernière sommation donne alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k|^{2p+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j \sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k|^{2j+2p},$$

Nous utilisons maintenant l'étude précédente (cas de l'exposant pair), pour affirmer que le terme général de la série ci-dessus est de la forme :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k|^{2(j+p)} = \frac{(-1)^{j+p} 2^{j+p}}{4^{j+p}} \sum_{\ell=0}^{j+p} \alpha_{\ell} |z - z_k|^{2(j+p-\ell)} |z|^\ell.$$

Toujours par resommation, nous pouvons conclure qu'il existe des coefficients c_j tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z - z_k|^{2p+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j |z|^{2j},$$

si bien que l'équation du lieu en question devient :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} c_j |z|^{2j} = C. \tag{10}$$

Introduisons alors la fonction holomorphe sur le disque ouvert $D(0, 1)$ définie par :

$$\psi(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_j z^{2j} - C.$$

L'équation du lieu cherché devient $\psi(|z|) = 0$. D'après le principe des zéros isolés, la fonction ψ admet un nombre fini ou dénombrable de zéros réels positifs, éventuellement aucun. S'il n'y en a pas le lieu est vide, sinon on note r_j cette famille de zéros isolés. Alors on obtient une famille de cercles concentriques d'équation $|z| = r_j$.

Remarques

Il est possible de démontrer que cette famille de cercles est finie au lieu de dénombrable. Pour cela on peut remarquer que le rayon d'un cercle inscrit dans le polygone régulier est forcément inférieur ou égal à l'apothème ρ du polygone, elle-même strictement inférieure à 1. Or ψ n'admet qu'un nombre fini de zéros sur $[0, \rho]$, d'où le résultat. Une autre possibilité serait de remarquer que le développement en série de $|z - z_k| = \sqrt{1 + t_k}$ est en fait valable pour $t_k \in]-1, 1[$ ce qui fait que finalement ψ reste analytique sur un ouvert contenant le polygone.

Enfin, la technique du développement en série de $\sqrt{1 + t}$ s'étend certainement à des exposants $p \in \mathbb{R}$ en posant par exemple $p = 2q + \alpha$

Remerciements

Cet article est tiré d'un mémoire de D.E.A réalisé par l'auteur sous la direction du regretté Jean-Luc Verlay, professeur à l'Université Paris VII. L'auteur remercie Linde Wester (Université d'Oxford, département d'informatique) pour sa relecture.

Références

- [1] SIMON LHUILLIER, *Eléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliqués à la recherche des lieux géométriques*, Paris, 1809, p. 153.
- [2] SIMON POL, *La recherche des lieux géométriques en géométrie analytique*, Paris, 1922.
- [3] EUGÈNE PROUHET, *Notice sur la vie et les travaux de Charles Sturm*, Bulletin de bibliographie, d'histoire et biographies mathématiques, 1835.
- [4] CHARLES STURM, *Théorèmes sur les polygones réguliers*, Annales de Mathématiques de Gergonne, Tome XV (1824-1825), pp. 250-256.
- [5] J. TRIGNAN, *La géométrie des nombres complexes*, Paris, 1991.
- [6] J.P. TRUC, *Précis de mathématiques et de statistiques*, Ellipses, 2012.